Long range scattering and blow-up problem for nonlinear dispersive equations

著者	駒田 洸一
号	92
学位授与機関	Tohoku University
学位授与番号	理博第3309号
URL	http://hdl.handle.net/10097/00131708

（別紙様式５）

論　文　内　容　要　旨

(NO.　1)

氏　　名	駒田　洸一	提出年	令和　　２年
学位論文の題　　目	Long range scattering and blow-up problem for nonlinear dispersive equations (非線形分散型方程式に対する長距離散乱と爆発解の存在)		

論　文　目　次

（別紙様式５）

(NO. 2)

論 文 要 旨

本博士論文では，非線形分散型方程式の解の挙動について考察する．非線形分散型方程式は波動現象を記述する偏微分方程式群であり，時間経過と共に波形の空間的局在性が崩れる「分散性」と重なった波の相互作用を表す「非線形性」という２つの性質が混在する．非線形分散型方程式においては，分散性と非線形性の競合によって，そのバランスに応じて様々な解の挙動が現れる．本博士論文では特に，(1) 非局所的な分散項を持つ非線形分散型方程式に対する長距離散乱, (2) 非等方的な４階の分散項を持つ非線形 Schrödinger 方程式に対する爆発解の存在, (3) 量子 Zakharov 系に対する爆発解の存在の３つの問題を取り扱う．

(1) 非局所的な分散項を持つ非線形分散型方程式に対する長距離散乱

ある非局所的な分散項を持つ非線形分散型方程式の解の長時間挙動について考える．この方程式は非線形項が２次項の場合は，陸棚波を記述する Smith 方程式や成層流体の内部波を記述する intermediate long-wave 方程式（ILW）を含む. Smith 方程式や（ILW）は Korteweg-de Vries 方程式（KdV）とよく似た水面波を記述する非線形方程式であるが，線形の分散項が通常の微分作用素ではなく，非局所的な Fourier 積分作用素で表されている点が異なる．これらの分散項の Fourier 像での表象は，低周波では水深の浅い波の方程式である（KdV）の分散項の表象で近似されるが，高周波では水深の深い波の方程式である Benjamin-Ono 方程式の分散項の表象に漸近している．本研究では，非線形項が散乱理論に関して臨界冪となる３次項の場合に解の時刻無限大での漸近形の函数を与え，実際にその函数に漸近する解の存在を証明した．

非線形分散型方程式では，分散性が非線形性に対して完全に優位となる場合には解の振幅が時間と共に減衰し，十分大きな時刻で非線形項の影響が無視できるほど小さくなる．特に解が時刻無限大で線形化方程式の解（自由解）に漸近する時，解が散乱すると云う．３次の非線形項は解が散乱する場合（短距離型）とそうでない場合（長距離型）の境目となる．非線形長距離散乱理論は初めに, Ozawa (1991) によって１次元３次の非線形 Schrödinger 方程式（NLS）について考察され，自由解に位相の修正を加えた修正自由解に時刻無限大で漸近する解の存在が示された．また, Korteweg-de Vries 型方程式に対する終値問題では, Hayashi-Naumkin (2006) が修正自由解に漸近する解の存在を示している．

第３章では，上述の非局所的な分散項と臨界冪の非線形項を持つ方程式に対する終値問題を考え, 修正自由解に時刻無限大で漸近する解の存在を証明する. (NLS) に対する長距離散乱理論においては，適切な位相の修正を定めるために線形化方程式の解に対する MDFM 分解が使われている．本研究で考えている方程式では, MDFM 分解が成り立たないことが解析の難しさとなる．そこで Hayashi-Naumkin (2006) による方法に従って，線形化方程式の解を停留位相法を用いて漸近展開し，主要部を取り出すことで適切な位相の修正を定める．漸近展開する際の剰余項の評価においては，考えている方程式の分散項の性質に注意して低周波と高周波に分けて精密な評価を行う．

⑵ 非等方的な４階の分散項を持つ非線形 Schrödinger 方程式に対する爆発解の存在

非線形 Schrödinger 方程式（NLS）はレーザー等の非線形光学において光の伝播を記述する偏微分方程式として知られているが，ファイバーアレイ内の伝播の数理モデルでは非等方な高階の分散項が現れる. Fibich-Ilan-Schochet (2003) は非等方な４階の分散項を持つ（NLS）の時間大域可解性に関する非線形項の冪の臨界指数について考察を行っており，冪がある指数以上となる場合の爆発解の存在が数値計算によって示唆されている．第４章では，ある非等方な４階の分散項を持つ(NLS）に対して，非線形項の冪がこの臨界指数以上となる場合に爆発解の存在を証明する.

通常の（NLS）に対する爆発解の存在は virial 等式を用いることで証明できるが，４階の分散項がある場合には virial 等式を直接適用できないことが証明の難しさとなる. Bouchel (2008) は virial 等式を非等方的に用いることで非等方な４階の分散項を持つ（NLS）の爆発解の存在を証明しているが，この方法が適用できる非線形項の冪の臨界指数は，前述の数値計算によって示唆されている臨界指数より大きくなる．そこで, Ogawa-Tsutsumi (1991) による virial 等式を空間局所化して用いる方法によって証明を行うことを考える．この方法は４階の項がある場合でも適用可能であるが，局所化を行う際に現れる誤差項の制御のために球対称函数に対する Sobolev の不等式を使う必要がある．本研究では，空間変数 x を x=(y,z) (y は４階の分散が働く空間方向の変数, z は４階の分散が働かない空間方向の変数）のように分けて, y に関して球対称かつ z に関して球対称な解を考えることで爆発解の存在を証明する．この場合，誤差項の評価では球対称 Sobolev 不等式と球対称性を課さない通常の Gagliardo-Nirenberg 不等式を組み合わせて用いる.

また，第４章では非等方な４階の分散項を持つ（NLS）に対する基底状態解の存在を変分法の議論を用いて証明し，作用汎函数が基底状態解より小さい解に対しては, virial 汎函数の符号が解の爆発と時間大域存在の条件の特徴付けを与えることを示す.

⑶ 量子 Zakharov 系に対する爆発解の存在

イオン化プラズマ内の Langmuir 波を記述する数理モデルとして量子 Zakharov 系がある．古典的な Zakharov 系が Schrödinger 方程式と波動方程式の連立系であるのに対し，量子 Zakharov 系は量子化効果による４階の項を持ち，４階 Schrödinger 方程式と４階波動方程式の連立系となっている．量子 Zakharov 系では，４階波動方程式中の音速パラメータが無限大の時を考えることで，形式的に単独の非線形４階 Schrödinger 方程式が導出される．第５章では，空間次元が６以上９以下の場合の量子 Zakharov 系と前述の非線形４階 Schrödinger 方程式に対して，負のエネルギーを持つ球対称解が有限時刻か無限時刻で爆発することを証明する.

証明は局所化 virial 等式を用いた議論によって行う．量子 Zakharov 系に対する virial 等式は対応する Hamilton 形式から導出されるが，この Hamilton 形式におけるシンプレクティック作用素が cut-off 函数と可換でないため, virial 等式を空間局所化する際に現れる誤差項の制御が難しくなる. 実際に波動方程式部分に周波数の原点付近で特異性を持つ誤差項が現れる．この誤差項の評価においては，４階波動方程式から未知函数に対する変数変換によって得られる方程式を用いて精密な評価を行う．この方程式の線形化方程式の解に対する分散型評価を用いることで，前述の誤差項に対して時間一様な評価を得ることができる．この時，分散型評価において低周波で周波数の正冪が得られることが周波数の原点での特異性を制御する上で重要となる.

別　紙

論文審査の結果の要旨

申請学位論文は分散型とよばれる非線形偏微分方程式の解の挙動について散乱問題および，解の爆発に関する研究したものである.

非線型分散型方程式の散乱問題は，解が時間無限遠に近づく際に，非線型項の影響を受けない解に近づくかを問う．特に長距離散乱とは非線型効果の影響を受けるものの，複素位相に補正を施すことにより解の絶対値が自由解に漸近することを指す．申請者は，非局所的な分散項を持つ非線形分散型方程式の解の長時間挙動を考察し，その長距離散乱を証明した.この問題は長波干渉方程式などを含む一般的な問題で,浅水孤立波を記述する著名なコルテベーグ・ドフリース方程式と似た水面波を記述する問題で，線形分散項が非局所的なフーリエ積分作用素で表されている．この問題の分散項のフーリエ表象は，低周波では浅水波である KdV 方程式のそれであり，高周波では深水波の方程式であるベンジャミン・小野方程式に漸近する．さらに 3 次の非線形項は長距離散乱となる臨界指数である．申請者は，非線形効果を考慮した位相の修正を考慮した漸近形を予想し，時刻無限大でその漸近形に漸近するような解の存在(散乱問題)を証明した.

次章においては非等方的な 4 階分散項を持つ非線形シュレディンガー方程式の解の有限時刻爆発を証明した．非等方的な 4 階の分散項を持つ非線形シュレディンガー方程式 (NLS) はレーザー等の非線形光学において光の伝播を記述する偏微分方程式として知られ，ファイバーアレイ内の数理モデルでは非等方な高階の分散項が現れる．光ファイバー中のレーザー光の集約は解の爆発として数学的に表現されるが，数値解析で予想されたこの問題を厳密に証明し，非線形項の冪がこの臨界指数以上の場合に解の有限時刻爆発を示した．4 階の分散項がある場合には有効なビリアル法則が成り立たない.そのためビリアル法則を空間局所化し空間変数 4 階の分散が働く空間方向の変数を分離し，解に変数に応じた対称性を課すことで解の有限時刻での爆発を示している.

最後の章では量子-ザハロフ系の解の不安定性を球対称の仮定の元で示した．　このモデルは,イオン化プラズマ中の乱流の一種であるラングミュラー波を記述する数理モデルとして知られ，量子化効果から生じる 4 階のシュレディンガー方程式と 4 階の波動方程式の非線型連立系であり，空間次元が 6 次元以上 9 次元以下の場合に負のエネルギーの仮定の下でその球対称解が不安定となることを証明した．量子ザハロフ方程式は,ハミルトン形式に現れる作用素がカット-オフ関数と可換でないため，ビリアル法則を空間局所化する際に現れる波動側の低周波誤差項の制御が焦点となる．この誤差項に対して，4 階の波動方程式に対応する発展作用素が低周波で正則性を上げる点を用いて証明した.

以上の結果はいずれも単独でなされ,申請者は自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。よって駒田洸一提出の博士論文は，博士（理学）の学位論文として合格と認める。